5. Tutorium – Theoretische Mechanik

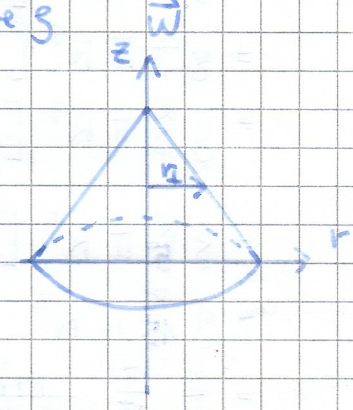
1. Trägheitsmomente starrer Körper

Trägheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer durch den Schwerpunkt verlaufenden Achse.

$$J_A = \int_V r_\perp^2 \, \varrho(\vec{r}) \, dV$$

Mit $r_\perp$ wird der zur Rotationsachse $\vec{\omega}$ senkrechte Anteil bezeichnet.

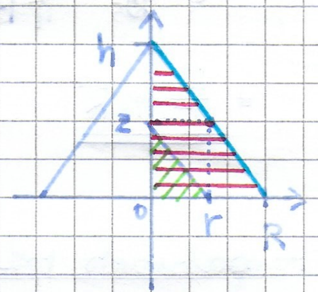
Beispiel 1: Zylinder homogener Massendichte ϱ



$$J_A = \varrho \int_V r_\perp^2 \, dV \quad \text{mit } r = r_\perp$$

$$= \varrho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{?} r^3 \, dr \, d\varphi \, dz$$

Integrationsgrenze von r ist von der Höhe z abhängig.
Die beiden Dreiecke ΔhOR und ΔzOr sind ähnlich zueinander.



$$\Rightarrow \quad \frac{h}{R} = \frac{z}{r} \quad \Rightarrow r = \frac{z}{h} R$$

(Alternativ lässt sich aus der Kante des Zylinders eine Geradengleichung der Form $r(z) = R - \frac{R}{h} z$ aufstellen und als Integrationsgrenze wählen.)

$$\Rightarrow J_A = \varrho \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{\frac{z}{h}R} r^3 \, dr \, dz \, d\varphi$$

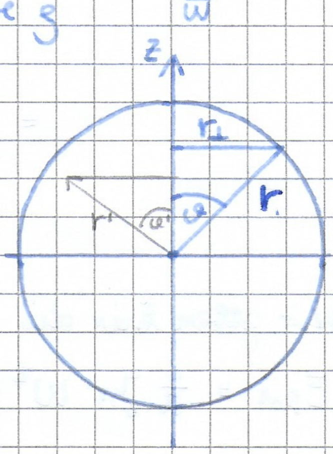
$$= 2\pi \varrho \int_{z=0}^{h} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^{\frac{z}{h}R} dz$$

$$= \frac{\pi \varrho}{2} \int_{z=0}^{h} \frac{R^4}{h^4} z^4 \, dz$$

$$= \frac{\pi}{10} \varrho \frac{R^4}{h^4} h^5 \qquad ; \varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi}{3} R^2 h}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{10} m R^2}}$$

Beispiel 2: Kugel mit homogener Massendichte ϱ



$$J_A = \varrho \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r_\perp^2 \, r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

mit $r_\perp = \sin\vartheta \cdot r$

(CAVE: Die Gleichheit $r_\perp = r$ gilt nur in Zylinderkoordinaten!)

$$= \varrho \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 r^2 \sin^3\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$J_A = \rho\, 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^R \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \int_0^\pi \sin\vartheta\,(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \int_0^\pi \sin\vartheta - \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \Bigg[\underbrace{\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}_{=\underbrace{\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi}_{2}} - \int_0^\pi \sin\vartheta\cos^2\vartheta\, d\vartheta\Bigg]$$

$$u = \cos\vartheta$$
$$du = -\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \left[2 - \int_{\vartheta=0}^{\pi} -u^2\, du\right]$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \left[2 + \left[\frac{1}{3}u^3\right]_{\vartheta=0}^{\pi}\right]$$

$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \left[2 + \left[\frac{1}{3}\underbrace{\cos^3(\pi)}_{=-1} - \frac{1}{3}\underbrace{\cos^3(0)}_{=1}\right]\right]$$

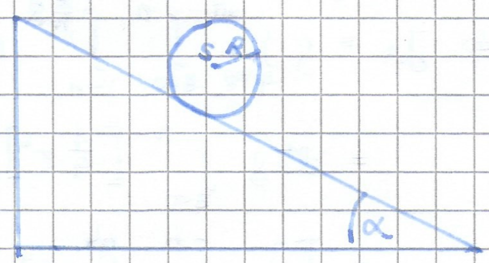
$$= \rho \frac{2}{5}\pi R^5 \left[2 - \frac{2}{3}\right]$$

$$= \rho \frac{8}{15}\pi R^5 \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{15}\,\frac{m\pi R^5}{\pi R^3}$$

$$= \frac{2}{5} m R^2$$

② Hangabwärts rollender Zylinder



Kinetische Energie:
setzt sich zusammen aus einer Translation des Schwerpunktes und der Rotation des Zylinders

Translation des Schwerpunktes S mit Geschwindigkeit V.

Woher kommt diese Annahme? Kapitel: Systeme von Punktmassen

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{S}}\right)^2$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i'^{\,2} + \underbrace{\sum m_i \dot{\vec{r}}_i'}_{=0}\,\dot{\vec{S}} + \sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{S}}^2$$

=0 Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem verschwindet

$$= \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\vec{S}}^2}_{=E_{kin}(\vec{S})} + \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{\vec{r}}_i'^{\,2}}_{=E_{rot}}$$

(siehe nächstes Tutorium)

Wir geben hier die Rotationsenergie erst einmal an mit

$$E_{Rot} = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega^2$$

5. Tutorium - Theoretische Mechanik

Schwerpunkt: $T_S = \frac{1}{2} M \cdot V^2$

Trägheitsmoment des Zylinders:

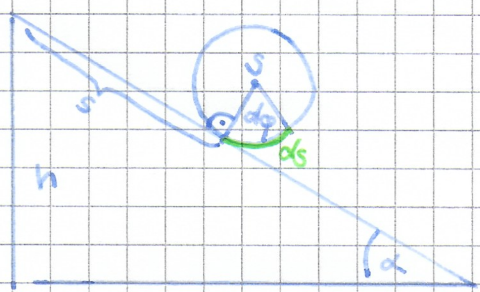
$$J_A = \int \rho(\vec{r}) \cdot r^2 \, dV$$

$$= \rho \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{h} r^3 \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$= 2\pi \rho \left(\frac{1}{4} R^4\right) \cdot h \qquad \text{mit } \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 \cdot h}$$

$$= \frac{m \pi R^4 h}{2\pi R^2 \cdot h}$$

$$= \underline{\underline{\frac{m}{2} R^2}}$$



$$\Rightarrow E_{Rot} = \frac{1}{2} \frac{m}{2} R^2 \omega^2$$

Da sich der Schwerpunkt immer senkrecht (zur Ebene) über dem Auflagepunkt liegt bewegt sich S im Zeitintervall dt um ds/V

$$ds = V \cdot dt \qquad \text{zudem: } ds = R \, d\varphi$$

$$\Rightarrow R \, d\varphi = V \cdot dt$$

$$\Rightarrow \underline{V} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \underline{R\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_{Rot} = \frac{M}{4} V^2}}$$

$$\Rightarrow T = E_{kin,S} + E_{Rot} = \underline{\underline{\frac{3}{4} M V^2}}$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen. Da der Potentialnullpunkt beliebig ist, lässt sich schreiben:

$$E = \frac{3}{4} M V^2 + Mg \cdot h \qquad \text{mit } h = s \cdot \sin\alpha \qquad V = \frac{ds}{dt}$$

$$0 = \frac{3}{4} M \dot{s}^2 + Mg \, s \sin\alpha \quad \Big| \frac{d}{dt}(\cdot)$$

$$\frac{3}{2} M \dot{s} \ddot{s} = - Mg \, \dot{s} \sin\alpha$$

$$\underline{\underline{\ddot{s} = -\frac{2}{3} g \sin\alpha}}$$

⇒ Bewegungsgleichung des Schwerpunkts. $\ddot{s} \neq 0$ da äußere Kräfte herrschen.